

KINETISCHE GASTHEORIE

C1: Łukasz Lesiński und Jörg Duschmalé

17. Dezember 2006

1 Einleitung

1.1 Einführende Bemerkungen

Die statistische Thermodynamik liefert eine Verbindung zwischen mikroskopischen und makroskopischen Eigenschaften der Materie, indem sie die mikroskopischen Vorgänge statistisch beschreibt. Die kinetische Gastheorie, ein Teilgebiet der statistischen Thermodynamik beschreibt die Eigenschaften von Gasen durch die Bewegung der Gasteilchen. Dabei werden drei Grundannahmen vorausgesetzt:

- Das Gas besteht aus Teilchen der Masse m , die sich unaufhörlich bewegen.
- Die Teilchen sind vernachlässigbar klein (im Vergleich zur zurückgelegten Distanz zwischen zwei Stößen).
- Die einzigen Wechselwirkungen zwischen den Teilchen sind kurze, unregelmässige elastische Stösse.

im Weiteren wird angenommen, dass der einzige Beitrag zur Energie des Gases aus der kinetischen Energie der einzelnen Gasmoleküle besteht.

1.2 Benötigte Gleichungen

1.2.1 Boltzmannverteilung

Die Boltzmannverteilung (Gleichung 1) beschreibt den Anteil an Teilchen $\frac{n_i}{N}$, die bei einer bestimmten Temperatur T die Energie ϵ_i besitzen.

$$\frac{n_i}{N} = \frac{e^{-\frac{\epsilon_i}{kT}}}{\sum_i e^{-\frac{\epsilon_i}{kT}}} \quad (1)$$

1.2.2 Barometerformel

Die Barometerformel (Gleichung 5) beschreibt wie sich der Druck bei konstanter Temperatur in Abhängigkeit der Höhe ändert. Der lineare Zusammenhang des Schwereendrucks, wie er z.B. für Flüssigkeiten gilt, kann hier nicht angewendet werden, da dabei Inkompressibilität vorausgesetzt wird, wie sie für Gase nicht gilt.

Bei einer konstanten Gasmenge ist der Druck zum Volumen umgekehrt proportional.

$$P \cdot V = \text{const.} \xrightarrow[V=m]{g} \frac{\rho(h)}{P(h)} = \text{const.}$$

$$\rho(h) = \frac{\rho(0)}{P(0)} \cdot P(h) \quad (2)$$

Vergrößert man nun die Höhe h um dh , so nimmt der Druck um das Gewicht des Luftpaketes der Höhe dh und des Einheitsquerschnittes ab.

$$dP = -\rho(h)gdh$$

Einsetzen von Gleichung 2 sowie Umformen liefert Gleichung 3.

$$\frac{dP}{P(h)} = -\frac{\rho(0)}{P(0)}gdh \quad (3)$$

Durch Integration und Auflösen nach dem Druck wird die Barometerformel (Gleichung 4) erhalten.

$$P(h) = P(0) \cdot e^{-\frac{\rho(0)}{P(0)} \cdot g \cdot h} \quad (4)$$

Mit Hilfe der Definition der Dichte und dem idealen Gasgesetz kann die Barometerformel auch in der in Gleichung 5 angegebenen Form geschrieben werden.

$$P(h) = P(0) \cdot e^{-\frac{M \cdot g \cdot h}{R \cdot T}} \quad (5)$$

1.2.3 Maxwell-Boltzmann-Geschwindigkeitsverteilung für ein 2D Gas

Die Maxwell-Boltzmann-Geschwindigkeitsverteilung beschreibt, wie die Geschwindigkeiten der einzelnen Teilchen in einem Gas verteilt sind. Der Anteil Teilchen einer gewissen Geschwindigkeit folgt einer Boltzmannverteilung (1) in Abhängigkeit der dazugehörigen potentiellen Energien. Für den zweidimensionalen Fall bedeutet dies

$$f(v) = K \cdot e^{-\frac{1}{2}m(v_x^2+v_y^2) \cdot \frac{1}{kT}} = K \cdot e^{-\frac{mv_x^2}{2kT}} \cdot e^{-\frac{mv_y^2}{2kT}} \quad (6)$$

Betrachten wir nun nur den Anteil in x-Richtung, so folgt daraus Gleichung 7.

$$f(v_x) = K^{\frac{1}{2}} \cdot e^{-\frac{mv_x^2}{2kT}} \quad (7)$$

Da jedes Teilchen eine Geschwindigkeit besitzen muss folgt die Normierungsbedingung in Gleichung 8.

$$\int_{-\infty}^{\infty} K^{\frac{1}{2}} \cdot e^{-\frac{mv_x^2}{2kT}} dv_x = 2 \cdot \int_0^{\infty} K^{\frac{1}{2}} \cdot e^{-\frac{mv_x^2}{2kT}} dv_x \stackrel{!}{=} 1 \quad (8)$$

Mit Hilfe des bestimmten Integrals $\int_0^{\infty} e^{-au^2} du = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}}$ kann so die Konstante K bestimmt werden (Gleichung 9).

$$K = \frac{m}{2\pi kT} \quad (9)$$

Der x-Anteil (Gleichung 7) wird also zu Gleichung 10.

$$f(v_x) = \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot e^{-\frac{mv_x^2}{2kT}} \quad (10)$$

Die Wahrscheinlichkeit ein Molekül mit einer Geschwindigkeit zwischen v und $v + dv$ anzutreffen ist somit gegeben durch Gleichung 11.

$$f(v)dv = f(v_x)dv_x f(v_y)dv_y = \frac{m}{2\pi kT} \cdot e^{-\frac{mv^2}{2kT}} dv_x dv_y \quad \text{mit} \quad v^2 = v_x^2 + v_y^2 \quad (11)$$

Stellt man sich nun die Geschwindigkeiten zwischen v und $v+dv$ als die Fläche zwischen zwei Kreisen mit Radius v und $v+dv$ in einem v_x - v_y -Diagramm vor so ist ersichtlich, dass die Summe der Flächenstücke $dv_x dv_y = 2\pi v dv$ beträgt. Somit wird Gleichung 11 zur Maxwell-Boltzmann-Geschwindigkeitsverteilung (Gleichung 12).

$$f(v) = \frac{mv}{kT} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} \quad (12)$$

Mit Hilfe einfacher Überlegungen zur Bewegung der Gasteilchen sowie mit Hilfe von Gleichung 12 lassen sich folgende Ausdrücke für die mittlere quadratische Geschwindigkeit (Gl. 13), die mittlere Geschwindigkeit (Gl. 14) sowie die wahrscheinlichste Geschwindigkeit (Gl. 15) gewinnen [1].

$$\langle c^2 \rangle = \frac{2kT}{m} \quad (13)$$

$$c = \sqrt{\frac{\pi kT}{2m}} \quad (14)$$

$$c^* = \sqrt{\frac{kT}{m}} \quad (15)$$

1.3 Versuchsprinzip

Die Bewegungen von Gasen sollen nun im im folgenden beschriebenen Versuch mit Hilfe eines einfachen makroskopischen Modelles simuliert werden. Dazu steht ein Tisch mit Gebläse zur Verfügung, mit welchem die Reibung von sich darauf bewegendenden Plastikscheiben minimiert werden kann. Durch einen Schüttelmechanismus wird die thermische Bewegung der Teilchen simuliert. Im ersten Teil des Versuchs wird der Tisch geneigt, um die Gravitation in der Erdatmosphäre zu simulieren. So kann die Barometerformel (Gl. 5) überprüft werden. Wie aus Abb. 1 ersichtlich beträgt die durch die Neigung des Tisches simulierte Erdbeschleunigung $g' = g \cdot \sin \alpha$. Im zweiten Teil des Versuchs soll die Maxwell-Boltzmann-Geschwindigkeitsverteilung (Gl. 12) durch fotografische Messung der Geschwindigkeiten überprüft werden.

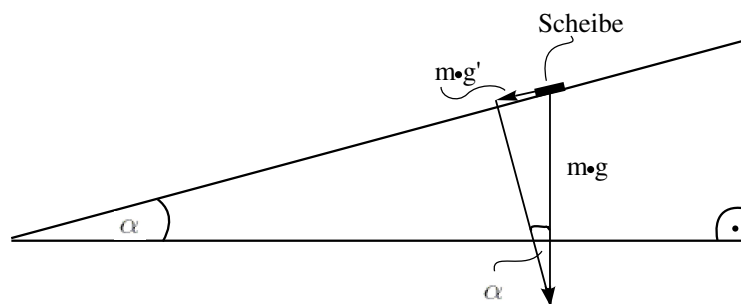


Abbildung 1: Schematische Darstellung des geneigten Tisches und der wirkenden Kräfte.

2 Experimentelles

2.1 Durchführung des 1. Versuchs

Der Tisch wurde um den Winkel $\alpha = 0.89^\circ$ geneigt und das Gebläse eingeschaltet. Der Schüttelmechanismus wurde auf eine Frequenz von 1 Hz gestellt. Sobald sich ein Gleichgewicht der Bewegung der Scheiben eingestellt hatte, wurde das Gebläse unterbrochen, was dazu führte, dass die Bewegung sofort aufhörte. Nun wurden die Scheiben nach den 10 cm auseinander liegenden Niveaus ausgezählt. Dies wurde insgesamt 20 mal wiederholt. Anschliessend wurde dasselbe mit einer Schüttelfrequenz von 1.5 Hz durchgeführt.

2.2 Durchführung des 2. Versuchs

Die Tischplatte wurde wiederum gerade gestellt sowie eine Digitalkamera auf einem Stativ befestigt und über einen Spiegel auf den Tisch ausgerichtet. Im Folgenden wurde die Frequenz wieder auf 1 Hz und das Gebläse eingestellt. Nun wurden 10 Photographien mit einer Belichtungszeit von 1 s gemacht. Dasselbe wurde mit einer Frequenz von 1.5 Hz wiederholt. Die so auf den Fotos entstandenen Linien wurden später mit dem Programm imagej ausgemessen.

3 Messdaten

3.1 Versuch 1: Barometerformel

Die erhaltene Anzahl Scheiben je Messung ist in Tabelle 1 angegeben und in Abbildung 2 dargestellt. Dabei wird der von der Barometerformel (Gl. 5) vorhergesagte exponentielle Abfall der Anzahl Scheiben pro Höhenniveau (Druck) ersichtlich.

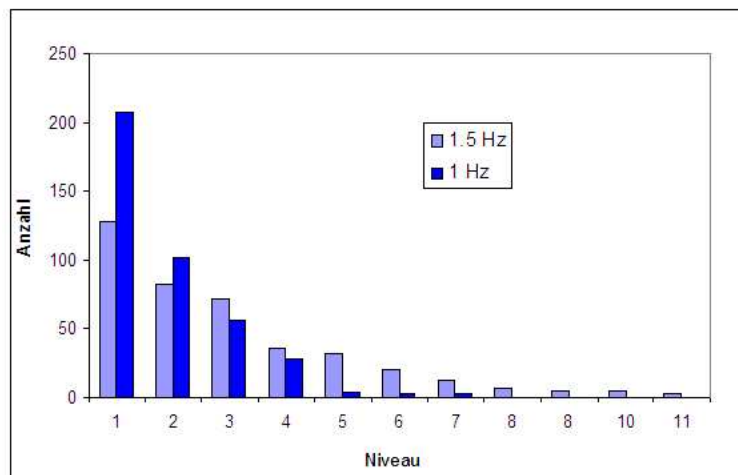


Abbildung 2: Die Messdaten des Versuchs 1 als Histogramm dargestellt.

Niveau	Bis zur Höhe (in cm)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	Summe
<i>Messung bei 1 Hz</i>																						
1	13	12	11	12	8	11	10	8	12	13	11	7	11	9	8	9	12	10	11	11	11	207
2	23	3	4	5	6	4	6	6	5	6	7	5	4	6	5	7	6	6	4	2	5	102
3	33	4	2	1	3	3	2	5	3	1	1	4	3	3	3	4	1	3	2	5	3	56
4	43	0	3	1	2	2	2	1	0	0	1	4	1	1	3	0	1	1	2	2	1	28
5	53	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	3
6	63	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2
7	73	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	2
<i>Messung bei 1.5 Hz</i>																						
1	13	7	6	5	5	6	9	11	10	7	6	7	4	6	6	5	6	9	5	4	4	128
2	23	4	5	7	1	6	5	4	4	8	4	5	3	3	6	4	4	1	4	2	2	82
3	33	4	5	2	8	4	2	1	1	1	5	3	3	4	5	4	3	3	6	4	4	72
4	43	2	2	1	1	2	2	0	1	0	2	1	2	3	2	2	2	3	2	3	3	36
5	53	0	1	1	2	0	0	2	1	1	2	2	3	4	1	3	2	2	0	2	2	31
6	63	2	0	0	1	2	1	2	1	1	1	1	2	0	0	1	1	0	2	1	1	20
7	73	0	0	2	0	0	1	0	1	1	0	1	1	0	0	1	1	1	0	2	0	12
8	83	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	1	1	0	1	7
9	93	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	5
10	103	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	1	5
11	113	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	2

Tabelle 1: Messdaten des Versuchs 1.

3.2 Versuch 2: Geschwindigkeitsverteilung

Die gemessenen Geschwindigkeiten sind in der folgenden Tabelle (Tabelle 2) dargestellt und in Abbildung 3 in Form von Histogrammen graphisch ausgewertet.

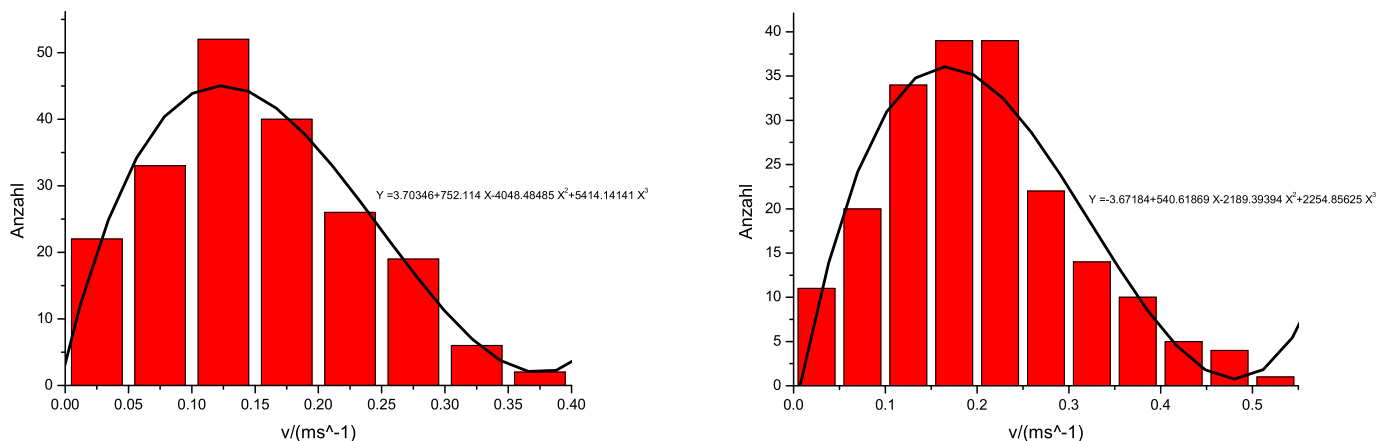


Abbildung 3: Darstellung der Geschwindigkeiten als Histogramm für 1.0 Hz (links) und 1.5 Hz (rechts).

<i>Gemessene Geschwindigkeiten bei 1.0 Hz $\frac{v}{\text{ms}^{-1}}$</i>														
0.24	0.07	0.11	0.10	0.13	0.03	0.17	0.16	0.17	0.04	0.17	0.22	0.16	0.18	0.23
0.11	0.25	0.17	0.15	0.25	0.12	0.13	0.21	0.11	0.08	0.19	0.19	0.06	0.02	0.06
0.22	0.25	0.04	0.17	0.11	0.14	0.18	0.15	0.14	0.26	0.11	0.08	0.06	0.33	0.12
0.20	0.18	0.21	0.08	0.05	0.04	0.09	0.16	0.07	0.07	0.08	0.27	0.09	0.06	0.07
0.08	0.12	0.14	0.03	0.23	0.20	0.03	0.28	0.05	0.18	0.05	0.28	0.04	0.14	0.01
0.12	0.11	0.16	0.34	0.15	0.11	0.00	0.21	0.11	0.25	0.05	0.18	0.23	0.15	0.07
0.13	0.10	0.18	0.14	0.04	0.23	0.27	0.07	0.15	0.17	0.23	0.38	0.14	0.00	0.08
0.28	0.10	0.33	0.10	0.17	0.08	0.13	0.11	0.06	0.22	0.26	0.04	0.04	0.16	0.05
0.09	0.13	0.01	0.25	0.13	0.05	0.18	0.24	0.16	0.15	0.10	0.18	0.14	0.11	0.16
0.30	0.14	0.07	0.26	0.09	0.15	0.13	0.15	0.21	0.12	0.27	0.14	0.24	0.27	0.38
0.18	0.26	0.14	0.32	0.18	0.28	0.09	0.27	0.24	0.14	0.27	0.13	0.01	0.14	0.25
0.03	0.09	0.17	0.22	0.29	0.11	0.09	0.04	0.10	0.15	0.03	0.13	0.18	0.17	0.24
0.23	0.15	0.17	0.16	0.14	0.13	0.13	0.13	0.14						
<i>Gemessene Geschwindigkeiten bei 1.5 Hz $\frac{v}{\text{ms}^{-1}}$</i>														
0.18	0.14	0.10	0.20	0.12	0.31	0.27	0.29	0.15	0.15	0.25	0.24	0.15	0.24	0.23
0.21	0.29	0.22	0.28	0.32	0.40	0.21	0.17	0.41	0.17	0.13	0.17	0.13	0.15	0.18
0.26	0.09	0.12	0.20	0.19	0.25	0.05	0.23	0.28	0.34	0.23	0.11	0.05	0.17	0.53
0.25	0.04	0.22	0.15	0.37	0.14	0.17	0.07	0.22	0.04	0.12	0.19	0.20	0.12	0.29
0.14	0.21	0.32	0.36	0.10	0.16	0.28	0.21	0.13	0.13	0.24	0.15	0.32	0.18	0.30
0.05	0.26	0.18	0.03	0.08	0.09	0.29	0.24	0.18	0.20	0.16	0.23	0.33	0.10	0.17
0.09	0.31	0.20	0.30	0.31	0.16	0.09	0.21	0.08	0.29	0.09	0.11	0.21	0.45	0.04
0.16	0.15	0.35	0.21	0.24	0.28	0.11	0.16	0.18	0.06	0.23	0.18	0.13	0.14	0.32
0.25	0.25	0.35	0.17	0.20	0.04	0.36	0.07	0.23	0.13	0.12	0.04	0.26	0.23	0.20

Fortsetzung auf der Nächsten Seite.

Fortsetzung														
0.26	0.47	0.04	0.36	0.28	0.16	0.15	0.08	0.19	0.18	0.34	0.08	0.10	0.17	0.14
0.14	0.37	0.09	0.16	0.36	0.20	0.30	0.05	0.24	0.04	0.27	0.13	0.44	0.19	0.26
0.44	0.42	0.22	0.23	0.08	0.28	0.19	0.19	0.47	0.08	0.24	0.25	0.10	0.24	0.16
0.21	0.24	0.32	0.05	0.22	0.30	0.46	0.11	0.15	0.11	0.19	0.09	0.38	0.15	0.39
0.11	0.39	0.13	0.10	0.18										

Tabelle 2: Messdaten des Versuchs 2.

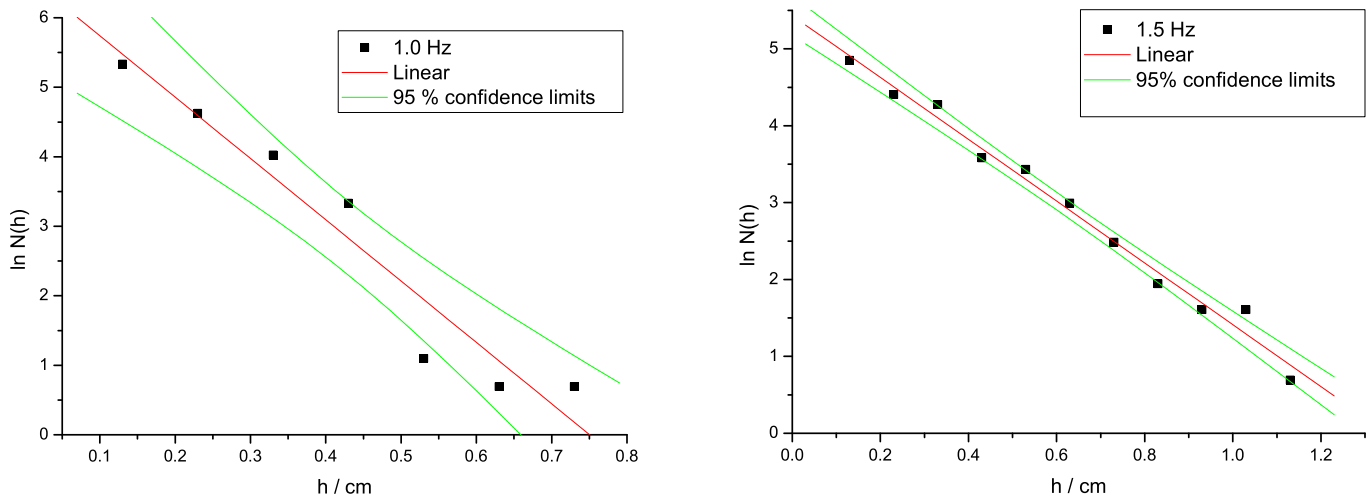
4 Diskussion und Beantwortung der Aufgaben

4.1 Berechnung der Temperatur für 1 Hz und 1.5 Hz mit der Barometerformel

Nach dem idealen Gasgesetz ist der Druck der Teilchenzahl proportional, sodass die Anzahl Scheiben auf einem gewissen Niveau als Druck auf diesem Niveau verstanden werden kann. Durch diese Überlegung sowie durch Logarithmieren folgt aus der Barometergleichung (Gl. 5) Gleichung 16.

$$\ln N(h) = -\frac{mg}{kT} \cdot h + \ln N(0) \quad (16)$$

Wird nun der natürliche Logarithmus der Anzahl Scheiben gegen die Höhe des entsprechenden Niveaus aufgetragen (Abb. 4), so folgt wie aus Gleichung 16 ersichtlich eine Gerade mit Steigung $-\frac{mg}{kT}$. Aus dieser Steigung kann dann die entsprechende Temperatur für die jeweilige Frequenz berechnet werden.

Abbildung 4: Plot von $\ln N(h)$ in Abhängigkeit der Höhe h für die beiden Frequenzen 1 Hz und 1.5 Hz

4.1.1 Berechnung von T

Die durch lineare Regression ermittelten Werte für die Steigungen B und die daraus resultierenden Temperaturen (mit der Annahme einer durchschnittlichen Masse der Scheiben von (30 ± 1) g) sind im Folgenden angegeben.

$$B_{1.0 \text{ Hz}} = -\frac{mg \sin \alpha}{kT_{1.0 \text{ Hz}}} = -8.82468 \text{ m}^{-1} \quad \Rightarrow \quad T_{1.0 \text{ Hz}} = 3.75 \cdot 10^{19} \text{ K}$$

$$B_{1.5 \text{ Hz}} = -\frac{mg \sin \alpha}{kT_{1.5 \text{ Hz}}} = -4.01905 \text{ m}^{-1} \quad \Rightarrow \quad T_{1.5 \text{ Hz}} = 8.24 \cdot 10^{19} \text{ K}$$

4.1.2 Fehlerrechnung

$$T = -\frac{mg'}{kB}$$

$$dT = \left(\frac{\partial T}{\partial m}\right) dm + \left(\frac{\partial T}{\partial B}\right) dB$$

$$dT = -\frac{g'}{kB} dm + \frac{g'm}{B^2 k} dB$$

$$dT = -\frac{dm}{m} \cdot T + \frac{dB}{B} \cdot T$$

$$\Delta T = \left(\frac{\Delta m}{m} + \frac{\Delta B}{B}\right) \cdot T \quad (17)$$

Mit Gleichung 17 wurden die folgenden Fehlerwerte berechnet:

$$\begin{array}{ll} \text{Für } T_{1.0 \text{ Hz}} & \Delta B = 1.03219 \text{ m}^{-1} \quad \Delta T_{1.0 \text{ Hz}} = 0.564 \cdot 10^{19} \text{ K} \\ & \Delta m = 1 \text{ g} \\ \text{Für } T_{1.5 \text{ Hz}} & \Delta B = 0.15993 \text{ m}^{-1} \quad \Delta T_{1.5 \text{ Hz}} = 0.603 \cdot 10^{19} \text{ K} \\ & \Delta m = 1 \text{ g} \end{array}$$

4.1.3 Angabe des Resultats

Somit wurden die folgenden Temperaturen berechnet:

$$T_{1.0 \text{ Hz}} = (3.8 \pm 0.6) \cdot 10^{19} \text{ K} \quad T_{1.5 \text{ Hz}} = (8.2 \pm 0.7) \cdot 10^{19} \text{ K}$$

4.1.4 Bemerkung

Zum erhaltenen Resultat gilt es zu bemerken, dass einerseits die 400 "herausgegriffenen Teilchen eigentlich noch keine genügend grosse Stichprobe darstellen um die quantitativen statistischen Aussagen zu treffen, andererseits darf auch die menschliche Psyche hier nicht unterschätzt werden, welche einen unterbewusst wohl oft dazu gebracht hat, eine Momentaufnahme dann anzusetzen, wenn sich gerade besonders viele Scheiben in einem höheren Niveau befanden. Dies sind dann wohl auch die grössten Fehlerquellen des Versuches. Die berechneten Temperaturen sind sehr gross, was allerdings nicht weiter verwunderlich ist, da wir es ja eben mit makroskopischen Objekten und nicht mit mikroskopischen Gasteilchen zu tun haben. Man stelle sich die Temperatur vor, die nötig wäre um Teilchen einer derart grossen Masse wie diese Plastikscheiben in eine solche thermische Bewegung zu bringen. Somit ist dieses Modell offensichtlich nicht geeignet um quantitative

Aussagen über das Verhalten von Gasen zu treffen. Allerdings ist es ein geeignetes Modell um sich die mikroskopischen Vorgänge vorstellen zu können und lässt einen auch unter Berücksichtigung der unterschiedlichen Größenordnungen ein Gefühl für den Zusammenhang von der Bewegung einzelner Teilchen mit einer makroskopischen Größe wie der Temperatur erhalten.

4.2 Überprüfung der Maxwell-Boltzmann-Geschwindigkeitsverteilung

4.2.1 Berechnung von c , $\langle c^2 \rangle$ und c^*

Nach Gleichungen 13, 14 und 15 wurden die folgenden Werte berechnet:

$$\begin{aligned} \text{Für } T_{1.0 \text{ Hz}} \quad \langle c^2 \rangle &= 0.0345 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} \\ c &= 0.164 \frac{\text{m}}{\text{s}} \\ c^* &= 0.131 \frac{\text{m}}{\text{s}} \\ \text{Für } T_{1.5 \text{ Hz}} \quad \langle c^2 \rangle &= 0.0758 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} \\ c &= 0.244 \frac{\text{m}}{\text{s}} \\ c^* &= 0.195 \frac{\text{m}}{\text{s}} \end{aligned}$$

4.2.2 Angabe der gemessenen Werte für c , $\langle c^2 \rangle$ und c^*

Nachfolgend sind die gemessenen Werte für c , $\langle c^2 \rangle$ und c^* angegeben. Die wahrscheinlichste Geschwindigkeit c^* wurde bestimmt, indem eine polynomische Funktion dritter Ordnung durch die in den Histogrammen dargestellten Werte (Abb. 3) gelegt und dessen Maximum bestimmt wurde. Diese Vorgehensweise wurde als legitim erachtet, nachdem das selbe Vorgehen bei mit Gleichung 12 berechneten Werten zeigte, dass die Abweichung des Maximums der Polynomfunktion vom richtigen Wert in der dritten Nachkommastelle liegt. Die gemessenen Werte sind:

$$\begin{aligned} \text{Für } T_{1.0 \text{ Hz}} \quad \langle c^2 \rangle &= 0.0292 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} \\ c &= 0.151 \frac{\text{m}}{\text{s}} \\ c^* &= 0.123 \frac{\text{m}}{\text{s}} \\ \text{Für } T_{1.5 \text{ Hz}} \quad \langle c^2 \rangle &= 0.0521 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} \\ c &= 0.204 \frac{\text{m}}{\text{s}} \\ c^* &= 0.166 \frac{\text{m}}{\text{s}} \end{aligned}$$

4.2.3 Vergleich von Rechnung und Messung

Die gemessenen Werte für die Geschwindigkeiten stimmen mal abgesehen von der Tatsache, dass sie grundsätzlich etwas zu klein sind, ganz gut mit den durch Gleichungen 13-15 berechneten Werten überein. Die Abweichungen sind im einstelligen $\frac{\text{cm}}{\text{s}}$ -Bereich. Es kann somit gesagt werden, dass das verwendete makroskopische Modell gut geeignet ist, die Maxwell-Boltzmann-Geschwindigkeitsverteilung zu simulieren.

4.3 Aufgaben

1. Die Barometerformel kann als ein Spezialfall der Boltzmann-Verteilung verstanden werden. Erkläre! Wie in Kapitel 1.2.1 erwähnt beschreibt die Boltzmann-Verteilung (Gl. 1) den Anteil an Teilchen, die sich bei einer konstanten Temperatur in einem gewissen Energiezustand befinden. Das Verhältnis von den Anteilen in zwei verschiedenen Energiezustand wird somit durch Gleichung 18 beschrieben.

$$\frac{n_i}{n_j} = \frac{e^{-\frac{\epsilon_i}{kT}}}{e^{-\frac{\epsilon_j}{kT}}} = e^{(\epsilon_j - \epsilon_i) \cdot \frac{1}{kT}} \quad (18)$$

Da bei konstanter Temperatur sich die Energien von Teilchen im Gravitationsfeld nur durch ihre potentielle Energie unterscheiden und da wieder nach dem idealen Gasgesetz die Anzahl durch den Druck ersetzt werden kann folgt Gleichung 19.

$$\frac{P_i}{P_j} = e^{\frac{mg}{kT} \cdot (h_j - h_i)} = e^{\frac{Mg}{RT} \cdot (h_j - h_i)} \quad (19)$$

Wählen wir nun j als Bezugspunkt ($P_j = P_0$, $h_j = 0$ und $h_i = h$) so folgt durch Umformung die Barometerformel (Gl. 5).

2. *Leite die Barometerformel und die Maxwell-Boltzmann-Geschwindigkeitsverteilung für ein 2-dimensionales Gas her.*

Siehe Kapitel 1.2.2 sowie 1.2.3.

3. *Wie würde die $P(h)$ -Funktion aussehen, wenn die Atmosphäre aus Wasserstoff, Argon oder Xenon bestünde.*

Abbildung 5 zeigt die Darstellung des Druckes in Abhängigkeit der Höhe nach der Barometerformel (Gl. 5). Man kann sehr schön die Abhängigkeit des Druckes von der Masse des Atmosphärgases sehen. Bei Wasserstoff nimmt der Druck nur sehr langsam mit der Höhe ab. Der exponentielle Verlauf der Kurve ist kaum mehr zu sehen. Im Gegensatz dazu nähme der Druck in einer Argon- oder Xenonatmosphäre (schwere Gase) sehr schnell mit der Höhe ab, was eine Kontraktion der Atmosphäre zur Folge hätte.

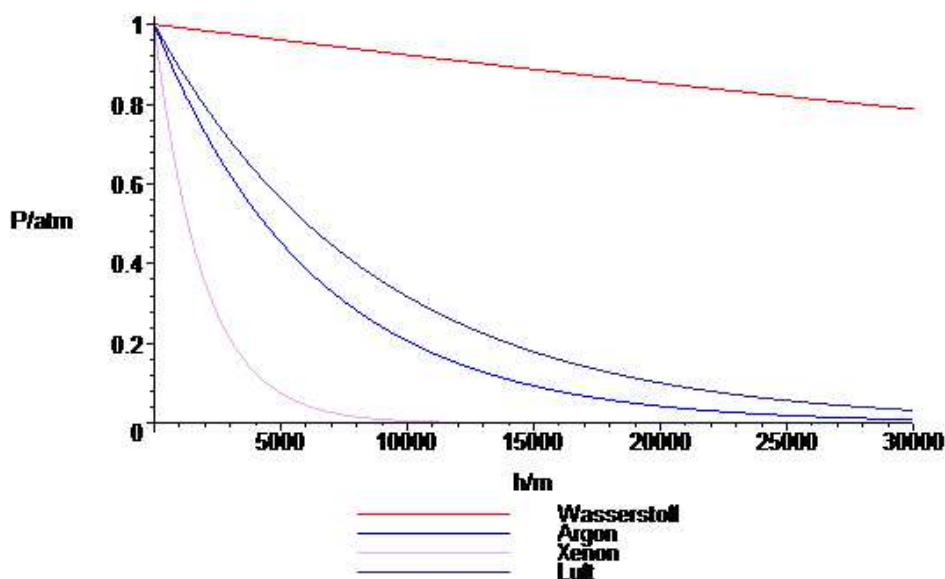


Abbildung 5: Die $P(h)$ -Funktion mit H_2 -, Ar- oder Xe-Atmosphäre.

4. *Stelle die Funktion $P(h)$ von 0 m - 30000 m mit einer konstanten Temperatur von $-50\text{ }^\circ\text{C}$, $0\text{ }^\circ\text{C}$ und $50\text{ }^\circ\text{C}$ dar.*

Wie in Abbildung 6 zu sehen ist der Verlauf der $P(h)$ -Kurve von der Temperatur abhängig.

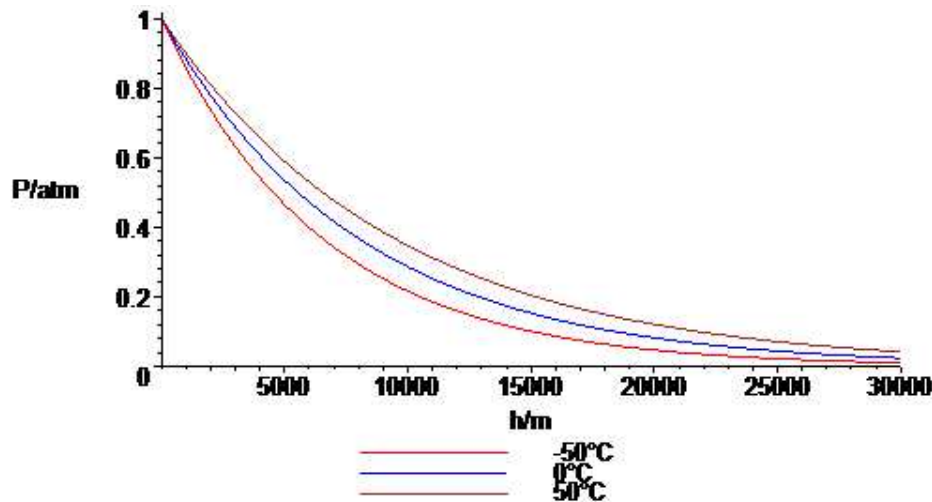


Abbildung 6: Die $P(h)$ -Funktion mit konstanter Temperatur von -50°C , 0°C und 50°C .

5. Bei welcher konstanten Temperatur wird eine Druckdifferenz von ca. 20000 Pa durch einen Höhenwechsel von 0 bis 2000 m bewirkt?
Mit der Barometerformel (Gl. 5) ergibt sich für $P(0) = 10^5$ Pa, $P(2000\text{ m}) = P(0) - 20000$ Pa, $M_{\text{Luft}} = 29 \frac{\text{g}}{\text{mol}}$ und $h = 2000$ m eine Temperatur von $T = 307$ K.
6. Welche konstante Temperatur würdest du verwenden wenn du den Druckunterschied zwischen 5000 m und 10000 m berechnen wolltest.
Nach Betrachten des Temperaturprofils der Erdatmosphäre [4] würde ich wohl die Berechnung bei etwa $T = 245$ K durchführen.
7. Stelle die experimentellen Resultate in einer Tabelle dar. Mach einen Graphen von $\ln(N)$ gegen die Höhe und führe eine lineare Regression durch. Berechne beide Temperaturen für 1 Hz und 1.5 Hz. Mache Fehlerrechnung und kommentiere das Resultat.
Siehe Kapitel 3 und 4.1.
8. Findest du das Model entspricht der Realität in Anbetracht der erhaltenen Temperaturen? Erkläre!
Siehe Kapitel 4.1 und 4.2.
9. Berechne die mittlere Geschwindigkeit, die mittlere quadratische Geschwindigkeit und die wahrscheinlichste Geschwindigkeit. Vergleiche mit den Daten von Versuch 2.
Siehe Kapitel 4.2

Literatur

- [1] P. Atkins, J. de Paula, *Physical Chemistry*, 7th Edition, Oxford University Press, New York, **2002**.
- [2] R. Reich, *Thermodynamik*, 2. Aufl., VCH, Weinheim, **1993**.
- [3] H. Rudin, *Physik I: Leitfaden zur Einführungsvorlesung WS 2004/2005*, Universität Basel, **1992**.
- [4] S. Lower, *J. Chem. Educ.*, **1998**, 75, 837-841.